**Ε**θνικό **Μ**ετσόβιο **Π**ολυτεχνείο

**Σ**χολή **Ε**φαρμοσμένων **Μ**αθηματικών και **Φ**υσικών **Ε**πιστημών



Ημερομηνία: 6ος  του 2016

Εργασία του μαθήματος ‘’Ρευστομηχανικής*’’*

**Σχετικά με την Διαφορική Ανάλυση Ροής**

Ον/μο σπουδαστή: Αθανάσιος Λάππας

Α.Μ. : 09107019

Ον/μο επιβλέποντος καθηγητή: Δημήτρης Γκούσης

*Σύνοψη - Abstract*

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το έκτο κεφάλαιο του βιβλίου του κου Άγγελου Θ. Παπαϊωάννου – Μηχανική των ρευστών (β’ έκδοση). Θα γίνει μια σύντομη, σχετικά, μα περιεκτική περίληψη του κεφαλαίου και των εννοιών, διαδικασιών και μεθόδων της διαφορικής ανάλυσης ροής, χρήσιμης στην ακριβή περιγραφή του πεδίου ροής. Ακολούθως, θα κάνουμε μια προσπάθεια μιας βαθύτερης κατανόησης, εννοιολογικής προσέγγισης των δυο εκ των τριών (πλην της ενέργειας) βασικών όρων-μεγεθών που χρησιμοποιούνται και επιστρατεύονται για το άνω εγχείρημα, αυτών των διαφορικών εξισώσεων συνέχειας και ορμής. Το κείμενο, λοιπόν, θα είναι χωρισμένο σε δύο μέρη, με το πρώτο και εκτενέστερο να ακολουθεί μορφολογικά μα όχι και απόλυτα την διάταξη και κατηγοριοποίηση του βιβλίου, χωρισμένο σε 5 υποενότητες ακριβώς όπως και στο βιβλίο, ενώ το δεύτερο, που είναι και πιο σύντομο (μα και πιο μεστό) ακολουθεί με την αναμενόμενη διάκριση των εφ ‘ών ο λόγος εννοιών-μεγεθών και την ανάλυσή αυτών.

## *Μέρος πρώτο:*

## Διαφορική Ανάλυση Ροής

### Διαφορές Μεταξύ Μακροσκοπικών και Διαφορικών Εξισώσεων Ροής (συντομογραφικά ΜΕ & ΔΕ αντίστοιχα).

Οι διαφορές μεταξύ των ΜΕ και ΔΕ συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα που περιγράφονται συνοπτικά στο βιβλίο του κου Παπαϊωάννου και τις παραθέτουμε σχεδόν αυτούσιες:

|  |  |
| --- | --- |
| Μακροσκοπικές Εξισώσεις | Διαφορικές Εξισώσεις |
| Εκφράζουν τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για μια ορισμένη περιοχή του χώρου | Εκφράζουν τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για ένα ορισμένο σημείο του χώρου |
| Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για μια γενική περιγραφή του πεδίου ροής | Χρησιμοποιούνται όταν ενδιαφερόμαστε για τη λεπτομερή περιγραφή του πεδίου ροής. |
| Ενδιαφέρουν περισσότερο το μηχανικό που ασχολείται με τις τεχνικές εφαρμογές των αρχών της Μηχανικής και των Ρευστών | Ενδιαφέρουν περισσότερο τον ερευνητή που ασχολείται με τη μαθηματική διερεύνηση των φαινομένων ροής ρευστών. |
| Δίνουν μέσες τιμές ή προσεγγιστικές σχέσεις των μεταβλητών του πεδίου ροής που είναι αποδεκτές από τεχνική άποψη | Δίνουν ακριβείς τιμές ή κατανομές των μεταβλητών του πεδίου ροής, οι οποίες συντελούν στην κατανόηση του μηχανισμού μεταφοράς m, P και Ε. |
| Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου πεπερασμένου μεγέθους, οι οποίοι μπορεί να περιλαμβάνουν περισσότερες από μια φάσεις. (δες: Βιβλίο) | Εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου απειροστού μεγέθους, οι οποίοι περιορίζονται σε μια μόνο φάση.  Για τη μαθηματική ολοκλήρωσή τους πρέπει να συμπληρωθούν με κατάλληλες οριακές και, πιθανόν, αρχικές συνθήκες. |
| Μπορεί να εξαχθούν από τις αντίστοιχες διαφορικές με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss. | Μπορεί να εξαχθούν από τις αντίστοιχες μακροσκοπικές με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος απόκλισης του Gauss |

### Οριακές και Αρχικές Συνθήκες

Όπως ξέρουμε για την επίλυση μερικών η συνήθων διαφορικών εξισώσεων ορισμένες φορές χρειάζεται η διατύπωση κάποιον *οριακών* ή *αρχικών συνθηκών* (αλλά και *τελικών* σε ορισμένες περιπτώσεις). Αυτές, στην ρευστομηχανική (όπως και σε κάθε άλλη επιστήμη), έχουν και κάποια φυσική έννοια. Αναφέρονται, λοιπόν, στα όρια του όγκου ελέγχου και περιγράφουν συνθήκες που μόνιμα πρέπει να ικανοποιούνται μεταξύ του ρευστού και των ορίων του (της μορφής και είδους και της συμπεριφοράς του χώρου – πλαίσιού του και του ρευστού σε αλληλεξάρτηση). Διακρίνονται κυρίως σε τρία είδη φυσικών διεπιφανειών: Στερεού – ρευστού, υγρού – υγρού και υγρού – αερίου. Ας δούμε λίγο την κάθε μια απ’ αυτές τις περιπτώσεις:

Στερεό-Ρευστό: Εδώ ισχύει η *συνθήκη μη ολίσθησης*, δηλαδή στα σημεία επαφής του (πραγματικού) ρευστού με το στερεό ισχύει ότι υχ = 0, όπου υ η ταχύτητα του υγρού στο εκάστοτε σημείο επαφής με το στερεό.

Υγρό-Υγρό: Εδώ ισχύουν δύο οριακές συνθήκες. Η πρώτη είναι γνωστή ως κινηματική οριακή συνθήκη που μας λέει ότι υχρευστού = υxπλαισίου (όπου και το πλαίσιο ρευστό είναι, κάνουμε όμως έτσι τον διαχωρισμό). Η δεύτερη μας μιλάει για τις ιξώδεις τάσεις, και μας λέει ότι τyxρευστού=τyxπλαισίου και είναι γνωστή ως *συνθήκη μηχανικής ισορροπίας*.

Υγρό – Αέριο: Εδώ ο ρυθμός ροής ορμής στο ρευστό είναι πρακτικά μηδέν, δηλαδή τyx|y = b = 0 ή (dυx/dy)|y = b = 0 (βάση του νόμου ιξώδους του Newton.

Οι αρχικές συνθήκες (που αντίστοιχα με αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι τελικές) χρειάζονται όταν η ροή του ρευστού είναι μη μόνιμη (δηλαδή στις δ.ε. υπάρχουν και παράγωγοι ως προς το χρόνο των εξαρτημένων μεταβλητών). Έτσι, στα προβλήματα μη μόνιμης ροής, πρέπει να καθοριστούν σχέσεις για τις τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών τη χρονική στιγμή t = 0.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το φυσικό νόημα των προβλημάτων μας καταδεικνύει και την επιλογή των αρχικών, οριακών και τελικών συνθηκών και βάση αυτών εξάγουμε τις κατάλληλες σχέσεις που θα συνδυαστούν με τις δ.ε. που προσδιορίζουν το εκάστοτε πρόβλημα.

### Διαφορική Εξίσωση Συνέχειας

Αυτή η δ.ε. εξάγεται απ’ τον νόμο διατήρησης μάζας. Εφαρμόζουμε αυτόν τον νόμο σε έναν ακίνητο όγκο ελέγχου απειροστής διαμέτρου. Ο (στιγμιαίος) Ρυθμός λοιπόν συσσώρευσης μάζας στον όγκο ελέγχου ισούται με τον (στιγμιαίο) ρυθμό εισροής μάζας στον όγκο ελέγχου μείον τον (στιγμιαίο) ρυθμό εκροής μάζας από τον όγκο ελέγχου. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται με την ακόλουθη εξίσωση:

η οποία εξάγεται με θεώρηση των εισροών-εκροών σε θεωρητικές επιφάνειες (η απόδειξη είναι αρκετά τετριμμένη και την αφήνουμε ως παραπομπή στο βιβλίο). Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να απαλείψουμε τον στοιχειώδη όγκο, οπότε έχουμε:

Και χρησιμοποιώντας των ανυσματικό διαφορικό τελεστή έχουμε:

σχέση που αποτελεί τη γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης συνέχειας σε ανυσματικό συμβολισμό, και καθορίζει τη σχέση μεταξύ πυκνότητας και ταχύτητας του ρευστού σε κάθε σημείο του πεδίου ροής.

Όπως βλέπουμε, η εξίσωση αυτή έχει (σε καρτεσιανές ή κυλινδρικές συντεταγμένες) τέσσερις αγνώστους: την πυκνότητα και τις τρείς συνιστώσες της ταχύτητας. Χρησιμοποιείται, δε, κυρίως για την απλοποίηση των διαφορικών εξισώσεων ορμής (που θα δούμε παρακάτω) και ενέργειας.

Σε ειδικές περιπτώσεις αλλάζει η μορφή της και γίνεται αρκετά πιο απλή, όπως, πχ, μόνιμη ροή ( όπου ο πρώτος όρος της εξίσωσης γίνεται 0 και η εξίσωση παίρνει την μορφή: **)** και στην ειδική περίπτωση ασυμπίεστης ροής (όπου , όπου ο όγκος των σωματιδίων του ρευστού παραμένει σταθερός καθώς κινούνται μέσα στο πεδίο ροής.

(

### Διαφορική Εξίσωση Ορμής

Η διαφορική εξίσωση ορμής είναι ουσιαστικά ο δεύτερος νόμος κίνησης του Νεύτωνα για ορισμένο σημείο του χώρου, γ αυτό συχνά ονομάζεται και εξίσωση κίνησης. Μας λέει, δηλαδή, ότι η μάζα πολλαπλασιασμένη με την επιτάχυνση ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στο ρευστό για ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου.

Για την εξαγωγή της εξίσωσης αυτής χρησιμοποιούμε πάλι έναν ακίνητο όγκο ελέγχου απειροστού μεγέθους διαμέσου του οποίου διέρχεται ένα ρευστό και εφαρμόζουμε σε αυτό την αρχή διατήρησης της ορμής. Η διαδικασία περιγράφεται απ’ τα εξής: Ο Ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού που περιέχεται στον όγκο ελέγχου ισούται με τον ρυθμό εισροής ορμής στον όγκο ελέγχου μείον τον ρυθμό εκροής της ορμής από τον όγκο ελέγχου, συν επίσης του αθροίσματος όλων των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω στον όγκο ελέγχου, για μια δεδομένη χρονική στιγμή t0.

Η εξίσωση, μαθηματικά, περιγράφεται απ’ την ακόλουθη εξίσωση τύπου Lagrange, στην οποία διακρίνουμε τα άνω ανεφερθέντα μέρη της:

Βλέπουμε ότι ένα σωματίδιο του ρευστού επιταχύνεται από τις δυνάμεις βαρύτητας, πίεσης και ιξώδους που το περιβάλλον ασκεί πάνω του.

Η Εξίσωση αλλιώς γράφεται και ως

Με να είναι η τοπική επιτάχυνση και η επιτάχυνση μεταφοράς του ρευστού, εξίσωση απ’ την οποία προκύπτει και η προηγούμενη αν θυμηθούμε την σχέση

Η εξίσωση ορμής μεταβάλλεται ανάλογα και την μορφή της υλικής σχέσης που διέπει τη ρεολογική συμπεριφορά του ρευστού. Σε όλα τα Νευτωνικά υγρά είναι ίδια, η ακόλουθη:

Στα μη νευτωνικά ρευστά διαφέρει από ρευστό σε ρευστό, λόγω των διαφορετικών υλικών σχέσεων στις οποίες υπακούουν τα ρευστά αυτά.